

**Soluție**

1. a)  $A^t = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$  și obținem  $B = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 28 & 56 \end{pmatrix}$ .

b) Se obține  $\det(B) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 \geq 0$

c) Punctele  $P_1, P_2, P_3, O$  sunt coliniare  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0, \forall k, t \in \{1, 2, 3\}$ .

$\det(B) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_k & a_t \\ b_k & b_t \end{vmatrix} = 0, \forall t, k \in \{1, 2, 3\}, t \neq k$  și rezultă concluzia.

2. a) Numărul elementelor mulțimii este  $|\mathbb{Z}_5|^{|L|} = 5^2 = 25$ , unde  $L = \{a, b\} \subset \mathbb{Z}_5$ .

b) Se verifică prin calcul.

c) Se verifică axiomele grupului. Pentru  $a, b \in \mathbb{Z}_5$ , notăm  $A(a, b) = \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ .

Elementul neutru este  $I_3 = A(\hat{0}, \hat{0})$ , iar simetrica matricei  $A(a, b)$  este matricea  $A(-a, -b)$ .